অধ্যায়-৩ বিমের ডিফ্লেকশন

SOS অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ডিফ্লেকশন বা বীমের ডিফ্লেকশন বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০০৪,০৫, ০৮,১০, ১১'পরি, ১৪'পরি, ১৫'পরি, ১৭'পরি, ১৮, ১৯'পরি, ২০'পরি, ২১,২৪,২৪'পরি

উত্তর ঃ লোড প্রয়োগের ফলে বীমের দৈর্ঘ্য বরাবর নিরপেক্ষ তলের অবস্থান পরিবর্তন বা বিচ্যুতি (উলম্ব স্থানচ্যুতি) কে বীমের ডিফ্লেকশন বলে।

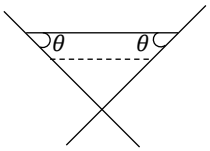
***** ২। বীমের স্থিতিস্থাপক বক্ররেখা (Elastic Curve) বলতে কী বুঝায?** বাকাশিবো- ২০০১, ০৩, ০৬, ০৯, ১০, ১০'পরি, ১৩, ১৫'পরি, ১৬, ১৭, ২৪

উত্তর ঃ লোড প্রয়োগে বীম বেঁকে গেলে এর দৈর্ঘ্য বরাবর নিরপেক্ষ অক্ষ স্থিতিস্থাপক সীমায় থেকে যে বক্ররেখার সৃষ্টি করে তাকে স্থিতিস্থাপক বক্ররেখা (Elastic Curve) বলে।

***** ৩। কী কী পদ্ধতিতে ডিফ্লেকশন নির্ণয় করা হয়?**

বাকাশিবো- ২০০৩, ০৮, ০৯'পরি, ১০, ১৪'পরি, ২০, ২৩'পরি

উত্তর ঃ ডিফ্লেকশন নির্ণয়ের পদ্ধতি নিম্নরূপ ঃ

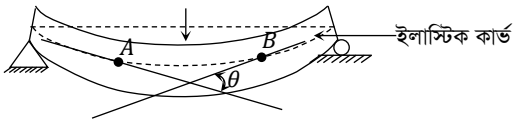


i) মোমেন্ট এরিয়া পদ্ধতি (Moment Area Method)

ii) ডাবল ইনটিগ্রেশন পদ্ধতি (Double Integration Method)
iii) ইউনিট লোড পদ্ধতি (Unit Load Method)
iv) কনজুগেট বীম পদ্ধতি (Conjugate Beam Method)
v) ম্যাকুলি'র পদ্ধতি (Macaulay's Method)

***** ৪। প্রথম মোমেন্ট উপপাদ্য বা প্রথম এরিয়া মোমেন্ট উপপাদ্যটি লেখ।** বাকাশিবো- ২০০৬, ১০, ১০'পরি, ২১

উত্তর ঃ



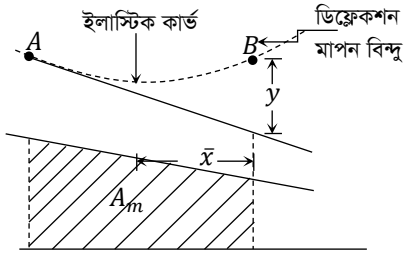
বীমের স্থিতিস্থাপক বক্ররেখার (Elastic Curve) উপর যে কোনো দুটি বিন্দুতে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করলে, স্পর্শকদ্বয়ের মাঝে যে কোণ (θ) উৎপন্ন হয়, তাকে প্রথম মোমেন্ট উপপাদ্য বা প্রথম এরিয়া মোমেন্ট উপপাদ্য বা বীমের স্লোপ বা ঢাল বলে।

স্লোপের (θ) পরিমাণ নির্ণয়ে উক্ত দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফলকে EI দ্বারা ভাগ করতে হয় অর্থাৎ, $\theta = \frac{A_m}{EI}$.

এখানে, A_m = বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফল
E = বীম পদার্থের মডুলাস অব ইলাস্টিসিটি

***** ৫। দ্বিতীয় মোমেন্ট বা দ্বিতীয় এরিয়া মোমেন্ট উপপাদ্য বলতে কী বুঝায়?** বাকাশিবো- ২০০৫, ০৬, ১০'পরি, ১২, ১৩, ১৬, ১৯, ১৯'পরি, ২০'পরি, ২১

উত্তর ঃ

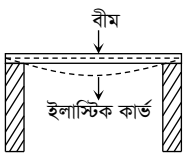


চিত্র ঃ B.M.D

বীমের স্থিতিস্থাপক বক্ররেখার উপর যে কোনো দুটি বিন্দুর (A ও B বিন্দু) মধ্যকার বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফলকে ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে {ক্ষেত্রফল (A_m) × ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু হতে ক্ষেত্রফলের কেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব $(\bar{x})$} EI দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যাবে তার পরিমাণ হবে অপর বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপরস্থ বিন্দু এবং ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দুর মধ্যকার উলম্বিক মান (y) এর সমান। একে দ্বিতীয় এরিয়া মোমেন্ট উপপাদ্য বা ডিফ্লেকশন নির্ণয়ের সূত্র বলে। অর্থাৎ,

$$y = \frac{A_m \bar{x}}{EI}.$$

**** ৬। সাধারণভাবে স্থাপিত বীমের ইলাস্টিক কার্ভের চিত্র এঁকে দেখাও।** বাকাশিবো- ২০০৯



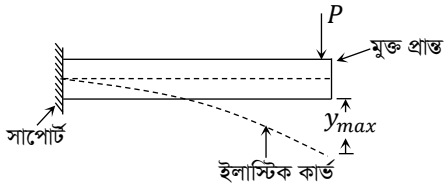
চিত্র ঃ বীমের ইলাস্টিক কার্ভ

উত্তর ঃ সাধারণভাবে স্থাপিত বীমের ইলাস্টিক কার্ভ নিম্নরূপ ঃ

***** ৭। ক্যান্টিলিভার বীমের সাপোর্টে ডিফ্লেকশনের পরিমাপ লেখ।**

H-TEC: 22, বাকাশিবো- ২০০৯, ২০

উত্তর ঃ ক্যান্টিলিভার বীমের সাপোর্টে ডিফ্লেকশন শূন্য (0) এবং মুক্ত প্রান্তে ডিফ্লেকশন সর্বোচ্চ (y_{max}) হয়।



*** ৮। বীমের ডিফ্লেকশন কী কী বিষয়ের উপর নির্ভর করে?**

উত্তর ঃ বীমের ডিফ্লেকশন বীমের আকার এবং বেন্ডিং মোমেন্টের উপর নির্ভর করে।

***** ৯। ক্যান্টিলিভার বীমের অনুমোদনযোগ্য ডিফ্লেকশন কত?**

বাকাশিবো- ২০১৮

উত্তরঃ ক্যান্টিলিভার বীমের অনুমোদনযোগ্য ডিফ্লেকশন $= \frac{1}{360} \times$ স্প্যান।

SOS সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। বীমের ডিফ্লেকশন নির্ণয়ের ধারণাগুলো লেখ।**

বাকাশিবো- ২০০৩, ০৬, ০৭, ০৮, ১০, ২৪

উত্তর ঃ

বীমের ডিফ্লেকশন নির্ণয়ের ধারণাগুলো (Assumptions) নিম্নরূপ ঃ

i) বেন্ডিং মোমেন্টের কারণে বীমে উৎপন্ন পীড়ন সমানুপাতিক সীমার নিচে থাকে এবং বীম পদার্থ হুকের সূত্র মেনে চলে।

ii) বাঁকা হওয়ার আগে এবং পরে বীমের দৈর্ঘ্য একই থাকবে।

iii) বেন্ডিং এর পূর্বে এবং পরে বীমের প্রস্থচ্ছেদ তল একই সমতলে থাকবে।

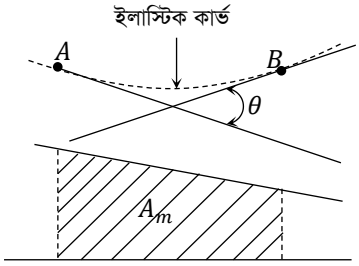
iv) বীমের দৈর্ঘ্যের তুলনায় ডিফ্লেকশনের পরিমাণ খুবই কম।

v) শিয়ার পীড়নের কারণে বীমের ডিফ্লেকশন খুবই কম, তাই শুধু বেন্ডিং এর কারণে উৎপন্ন ডিফ্লেকশনের হিসাব করা হয়।

*** ২। বীমের প্রথম মোমেন্ট এরিয়া উপপাদ্যটি চিত্রসহ লেখ।

বাকাশিবো- ২০১৫, ২০'পরি, ২৩

উত্তর ঃ



চিত্র ঃ B.M.D

বীমের স্থিতিস্থাপক বক্ররেখার (Elastic Curve)- এর উপর যেকোনো দুটি বিন্দুতে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করলে, স্পর্শকদ্বয়ের মাঝে যে কোণ (θ) উৎপন্ন হয়, তাকে বীমের প্রথম এরিয়া মোমেন্ট উপপাদ্য বা বীমের স্লোপ বা ঢাল বলে।

স্লোপের (θ) পরিমাণ নির্ণয়ে উক্ত দুই বিন্দুর (চিত্রের ইলাস্টিক কার্ভের উপর A ও B বিন্দু) মধ্যবর্তী বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফলকে EI দ্বারা ভাগ করতে হয়। অর্থাৎ স্লোপ, $(\theta) = \frac{A_m}{EI}$.

এখানে, $\theta =$ স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ (রেডিয়ান)

$AM =$ স্পর্শক বিন্দুদ্বয়ের (A ও B বিন্দু) মধ্যবর্তী বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফল

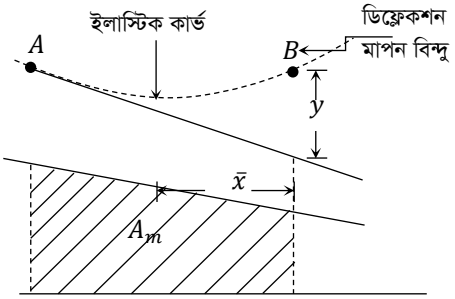
$E =$ বীম পদার্থের মডুলাস অব ইলাস্টিসিটি

$I =$ বীম সেকশনের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া।

***** ৩। বীমের দ্বিতীয় এরিয়া মোমেন্ট উপপাদ্যটি চিত্রসহ লেখ।**

বাকাশিবো- ২০১০, ১১'পরি, ১৬'পরি, ১৮

উত্তর ঃ বীমের স্থিতিস্থাপক বক্ররেখার (Elastic Curve) এর উপর যেকোনো দুটি বিন্দু (A ও B) এর মধ্যাকার বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফলকে ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নিয়ে {ক্ষেত্রফল (A_m) × ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু হতে উক্ত ক্ষেত্রফলের কেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব ($\bar{x}$)}, EI দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যাবে তার পরিমাণ হবে অপর বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপরস্থ বিন্দু এবং ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দুর মধ্যকার উলম্বিক মান (y) এর সমান। একে দ্বিতীয় এরিয়া মোমেন্ট উপপাদ্য বা ডিফ্লেকশন নির্ণয়ের সূত্র বলে।



চিত্র ঃ B.M.D

অর্থাৎ, $y = \dfrac{A_m \bar{x}}{EI}$.

এখানে, y = ডিফ্লেকশন বা উলম্বিক সরণ

$\bar{x}$ = ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু হতে বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ভরকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব।

A_m = স্পর্শক বিন্দু ও ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দুর (চিত্রে A ও B) মধ্যবর্তী বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফল

B = ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু

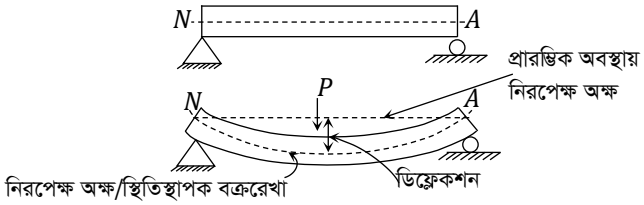
A = স্পর্শক বিন্দু

E = বীম পদার্থের মডুলাস অব ইলাস্টিসিটি

I = বীম সেকশনের মোমেন্ট অব ইনার্শিয়া

***** ৪। ডিফ্লেকশন কী? চিত্রসহ লেখ।** বাকাশিবো- ২০১৯

উত্তর ঃ লোড প্রয়োগের ফলে বীমের দৈর্ঘ্য বরাবর নিরপেক্ষ তলের অবস্থান পরিবর্তন (উলম্ব বিচ্যুতি) কে বীমের ডিফ্লেকশন বলে।



চিত্র ঃ লোড প্রয়োগে বীমের ডিফ্লেকশন

***** ৫। বীমের অনুমোদনযোগ্য ডিফ্লেকশনের পরিমাপগুলো লেখ।**

উত্তর ঃ বিভিন্ন বীমের অনুমোদনযোগ্য ডিফ্লেকমন নিম্নরূপ ঃ

i) সাধারণভাবে স্থাপিত সকল বীমের ডিফ্লেকশনের অনুমোদিত সীমা $= \frac{L}{325}$.

ii) বীমের প্লাস্টারের ফাটল এড়ানোর ডিফ্লেকশনের সর্বোচ্চ সীমা $= \frac{L}{360}$.

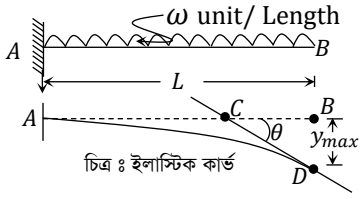
iii) ক্যান্টিলিভার বীমের ডিফ্লেকশনের অনুমোদিত সীমা $= \frac{L}{360}$.

iv) স্টিল বীমের ডিফ্লেকশন সাধারণত $\frac{L}{400}$ এর মধ্যে রাখা হয়।

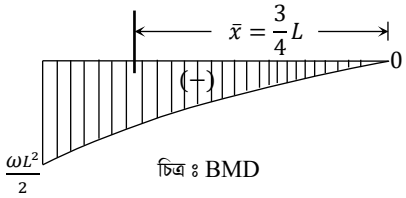
v) ভিত্তির (Foundation) বীমের ক্ষেত্রে ডিফ্লেকশনের সর্বোচ্চ সীমা $= \frac{L}{2000}$. [এখানে, L = বীমের স্প্যান বা দৈর্ঘ্য]

***** ৬। L- দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি ক্যান্টিলিভার বীমের প্রতি একক দৈর্ঘ্য ω- লোড সমভাবে বিস্তৃত থাকলে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন এবং মুক্তপ্রান্তের স্লোপ নির্ণয় কর।** বাকাশিবো- ২০০৭, ১৬, ২৪'পরি

উত্তর ঃ মনে করি, L- দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট্য AB ক্যান্টিলিভার বীমের প্রতি একক দৈর্ঘ্যে ω- লোড সমভাবে বিস্তৃত আছে। ফলে বীমের মুক্ত প্রান্তে (B) বেন্ডিং মোমেন্ট শূন্য এবং সাপোর্টে (A) $\frac{\omega L^2}{2}$ (নেগেটিভ) বেন্ডিং মোমেন্ট উৎপন্ন হবে।



চিত্র ঃ ইলাস্টিক কার্ভ



চিত্র ঃ BMD

এখন, বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফল, $A_m = \frac{1}{3} \times L \times \frac{-\omega L^2}{2}$

$= \frac{-\omega L^3}{6}$

মুক্তপ্রান্ত (B) হতে বা ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু হতে বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফলের ভরকেন্দ্র পর্যন্ত দূরত্ব, $\bar{x} = \frac{3}{4}L$

$\therefore$ স্লোপ, $\theta = \frac{A_m}{EI}$

$= \frac{\frac{-\omega L^3}{6}}{EI}$

$\therefore \theta = -\frac{\omega L^3}{6EI}$ (রেডিয়ান) **(Ans.)**

ডিফ্লেকশন, $y_{max} = \frac{A_m \bar{x}}{EI}$

$= \frac{-\frac{\omega L^3}{6} \times \frac{3}{4} \times L}{EI}$

$\therefore y_{max} = -\frac{\omega L^4}{8EI}$ **(Ans.)**

SOS রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

***** ১। ইলাস্টিক কার্ভের জন্য প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$.**

বাকাশিবো- ২০০৯'পরি, ১১'পরি, ১৩

উত্তর ঃ মনে করি, বেন্ডিং মোমেন্টের কারণে বৃত্তচাপের আকারে বেঁকে যাওয়া বীমের AB অংশের দৈর্ঘ্য $= dx$.

যেখানে $AC = BC = R$ হচ্ছে dx বৃত্তচাপের ব্যাসার্ধ এবং C হচ্ছে কেন্দ্র।

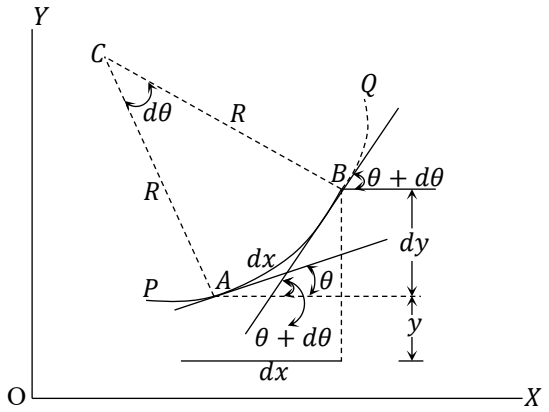
$\theta = A$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও x অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ,

$\angle ACB = d\theta$

$\therefore dx = Rd\theta$

এবং $R = \frac{dx}{d\theta}$

$\therefore \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$



যদি A বিন্দুর স্থানাঙ্ক x ও y হয়,

তবে $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$

$\therefore \theta = \frac{dy}{dx}$ ..... (i)[θ খুবই ছোট, তাই $\tan\theta = \theta$ লেখা যায়]

সমীকরণটিকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ ..... (ii)}$$

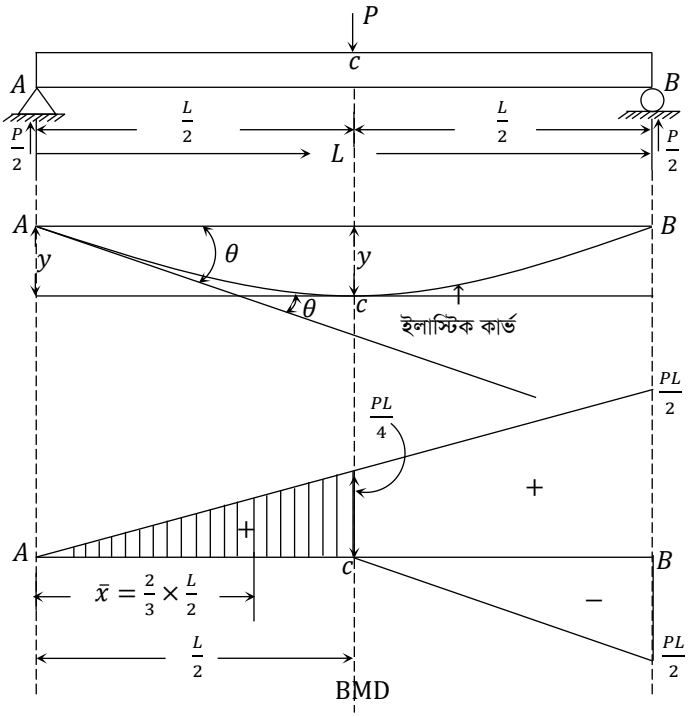
এখন আমরা জানি, $\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \text{ ..... (iii)}$$

(ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ হতে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$ **(প্রমাণিত)**

*** ২। L- দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সাধারণভাবে স্থাপিত বীমের মধ্যবিন্দুতে P লোড প্রয়োগ করা হলে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন এবং যেকোনো একপ্রান্তের স্লোপ নির্ণয় কর। **BPSC- 19, বাকাশিবো- ২০০৩, ০৯, ১২, ১২'পরি**

সমাধান ঃ মনে করি, AB সাধারণভাবে স্থাপিত বীমের দৈর্ঘ্য L এবং এর ঠিক মাঝে (C বিন্দু) P লোড প্রয়োগ করা হয়েছে।



C বিন্দুতে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন হবে, তাই C বিন্দুতে স্পর্শক আঁকি।

A ও B বিন্দুর প্রতিক্রিয়া বল

$R_A = R_B = \frac{P}{2}$ হবে।

A বিন্দুর প্রতিক্রিয়া জনিত B বিন্দুতে বেন্ডিং মোমেন্ট হবে,

$$M_1 = \pm\frac{PL}{2}$$

P লোডের কারণে B বিন্দুতে বেন্ডিং মোমেন্ট হবে $M_2 = \frac{-PL}{2}$.

যা বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রাম এঁকে দেখানো হলো।

A বিন্দুতে স্লোপ নির্ণয়ের জন্য A ও C বিন্দুর মধ্যবর্তী মোমেন্ট ডায়াগ্রাম বিবেচনা করে পাই,

$$A_m = \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{PL}{4} \quad [\frac{L}{2} \text{ তে } BMD \text{ এর উচ্চতা } \frac{PL}{4}]$$

$= \frac{PL^2}{16}$

এবং A বিন্দু হতে (ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু) A ও C এর মধ্যবর্তী বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ভরকেন্দ্রের দূরত্ব, $\bar{x} = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{3}$

মনে করি, A ও C বিন্দুদ্বয়ের স্পর্শকের মধ্যে উৎপন্ন কোণ θ এবং ইলাস্টিক কার্ভের C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক হতে A বিন্দুর উল্লম্বিক সরণ $= \Delta$, যা C বিন্দুর সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন y-এর সমান।

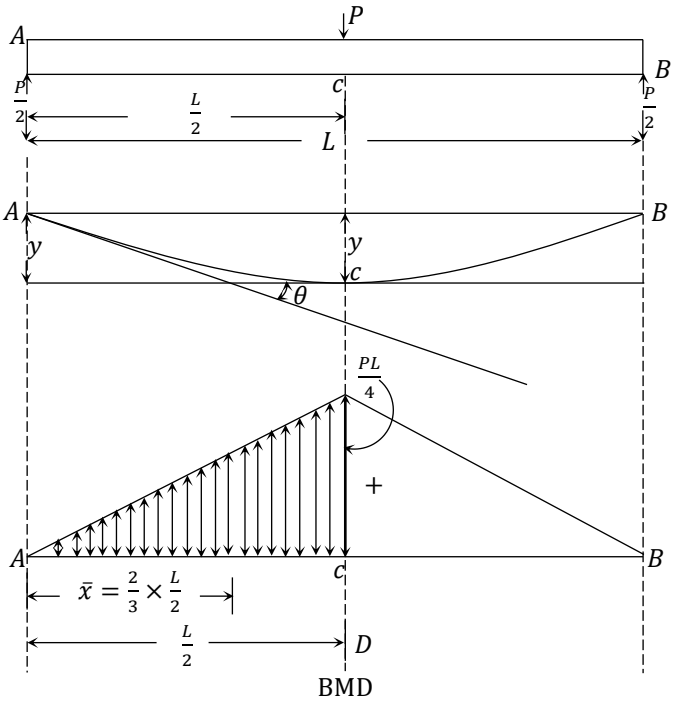
$\therefore$ প্রথম এরিয়া মোমেন্ট উপপাদ্য হতে, স্লোপ, $\theta = \frac{A_m}{EI} = \frac{PL^2}{16 \times EI} = \frac{PL^2}{16EI}$ (রেডিয়ান) **(Ans.)**

এবং দ্বিতীয় এরিয়া মোমেন্টের উপপাদ্য হতে, ডিফ্লেকশন, Δ অথবা $y = \frac{A_m \bar{x}}{EI} = \frac{\frac{PL^2}{16} \times \frac{L}{3}}{EI} = \frac{PL^3}{48EI}$ **(Ans.)**

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

চিত্রানুসারে AB বীমের C বিন্দুতে P লোডের ফলে C বিন্দুতে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন হবে।

স্পর্শক ও ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দুর মধ্যবর্তী বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের ক্ষেত্রফল অর্থাৎ C ও A বিন্দুর মধ্যকার বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের



ক্ষেত্রফল $= A_m = \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{PL}{4} = \frac{PL^2}{16}$

ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু (A) হতে A ও C এর মধ্যবর্তী বেন্ডিং মোমেন্ট ডায়াগ্রামের

ভরকেন্দ্রের দূরত্ব $\bar{x} = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{3}$

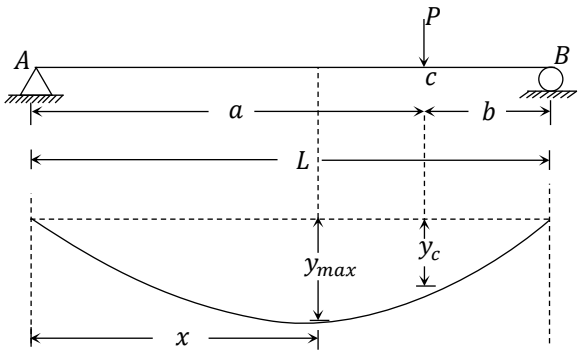
$\therefore$ স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্গত স্লোপ কোণ, θ

$\therefore$ স্লোপ, $\theta = \frac{A_m}{EI} = \frac{PL^2}{16EI}$ (রেডিয়ান) **(Ans.)**

এবং ডিফ্লেকশন, $y = \frac{A_m \bar{x}}{EI} = \frac{\frac{PL^2}{16} \times \frac{L}{3}}{EI} = \frac{PL^3}{48EI}$ **(Ans.)**

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

❖ নিম্নের লোড প্রয়োগ পদ্ধতির জন্য কয়েকটি সূত্র মনে রাখতে হবে।
তা হলে সমাধান ছোট ও সহজ হবে।



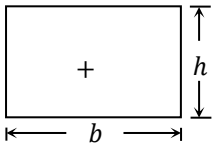
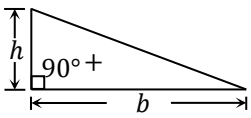
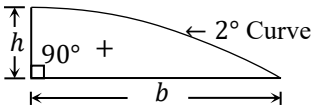
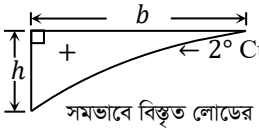
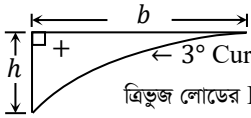
i) সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন হবে A থেকে ছোট x দূরত্বে (যে পার্শ্বে বেশি স্প্যান)

$\therefore x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$.

ii)সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন, $y_{max} = \dfrac{P \times b \times (L^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}\, ELI}$

iii) লোডের নিচে ডিফ্লেকশন, $y_c = \dfrac{Pa^2b^2}{3EIL}$

এখানে খেয়াল রাখতে হবে লোডের যে পার্শ্বে বেশি স্প্যান সে পার্শ্বকে 'a' এবং অপর পার্শ্বকে 'b' ধরবো। অর্থাৎ $a > b$ হবে।

চিত্র	ভরকেন্দ্র	ক্ষেত্রফল
	$\frac{b}{2}, \frac{h}{2}$	$b \times d$
	শীর্ষ হতে $= \frac{2}{3}b, \frac{2}{3}h$ সমকোণ হতে $= \frac{1}{3}b, \frac{1}{3}h$	$\frac{1}{2} \times b \times h$
 সমভাবে বিস্তৃত লোডের BMD	শীর্ষ হতে $= \frac{5}{8}b, \frac{5}{8}h$ সমকোণ হতে $= \frac{3}{8}b, \frac{3}{8}h$	$\frac{2}{3} \times b \times h$
 সমভাবে বিস্তৃত লোডের BMD	শীর্ষ হতে $= \frac{3}{4}b, \frac{3}{4}h$ সমকোণ হতে $= \frac{1}{4}b, \frac{1}{4}h$	$\frac{1}{3} \times b \times h$
 ত্রিভুজ লোডের BMD	শীর্ষ হতে $= \frac{4}{5}b, \frac{4}{5}h$ সমকোণ হতে $= \frac{1}{5}b, \frac{1}{5}h$	$\frac{1}{4} \times b \times h$

Note ঃ সাধারণভাবে স্থাপিত বীমের ক্ষেত্রে সাপোর্ট থেকে ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু পর্যন্ত হিসাব করতে হবে। ক্যান্টিলিভার বীমের ক্ষেত্রে ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু থেকে সাপোর্টের দিকে হিসাব করতে হবে।

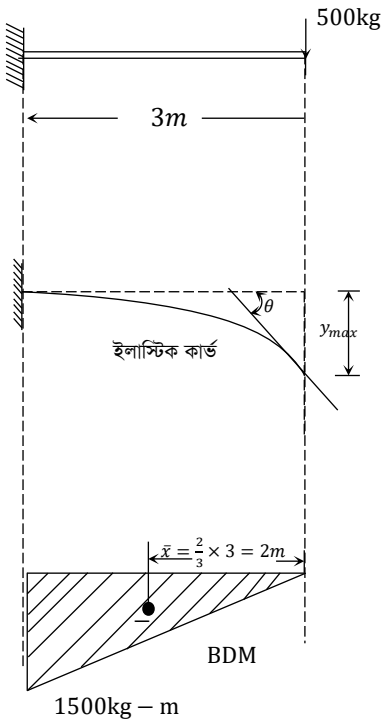
SOS গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

***** ১। $3m$ দীর্ঘ একটি ক্যান্টিলিভার বীমের মুক্তপ্রান্তে $500\ kg$ কেন্দ্রীভূত লোড আপতিত রয়েছে। বীমের আকার $10\ cm \times 10\ cm$. বীমটির সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন নির্ণয় কর। $E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$.**

BPSC- 17, বাকাশিবো- ২০০৬, ১৮, ২৪

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $b = 10\ cm$

$$d = 10\ cm$$
$$E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$$
$$P = 500\ kg$$



$$\therefore I = \frac{bd^3}{12} = \frac{10 \times (10)^3}{12} = 833.33\ cm^4$$

$$A_m = \frac{1}{2} \times 3 \times 100 \times 1500 \times 100$$
$$= 2{,}25{,}00{,}000\ kg\text{-}cm^2$$

যেহেতু সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন মুক্ত প্রান্তে হবে।

$$\therefore \bar{x} = \frac{2}{3} \times 3 = 2\ m = 200\ cm$$

আমরা জানি, ডিফ্লেকশন, $y = \frac{A_m \bar{x}}{EI}$

$$= \frac{2{,}25{,}00{,}000 \times 200}{2 \times 10^6 \times 833.33}$$

$$\therefore y_{max} = 2.70\ cm(\downarrow)\ \textbf{(Ans.)}$$

[অর্থাৎ ডিফ্লেকশন $2.70\ cm$ নিচের দিকে]

❖ **যদি স্লোপ ও চাইতো ঃ**

স্লোপ, $\theta = \frac{A_m}{EI} = \frac{2,25,00,000}{2\times10^6\times833.33}$

$= 0.0135$ (radian)( ) **(Ans.)**

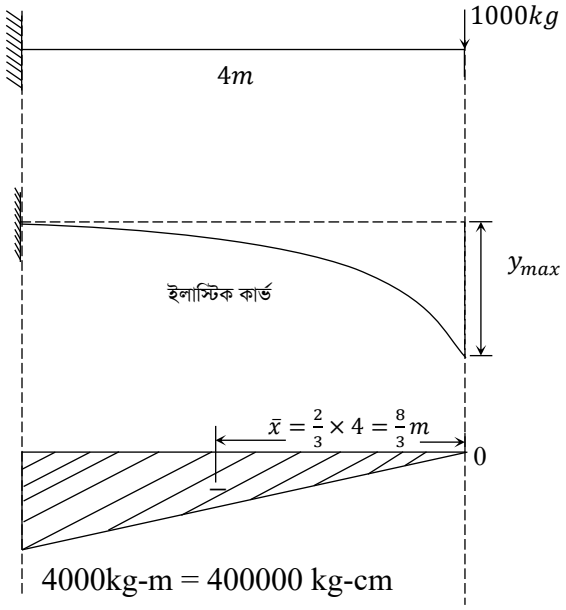
[অর্থাৎ স্লোপ, $\theta = 0.0135$ rad. (clockwise) কোণ তৈরি করবে]

N.B ঃ এই ম্যাথগুলো সরাসরি সূত্র বসিয়েও করা যাবে। যেমন ঃ স্লোপ, $\theta = \frac{PL^2}{2EI}$ এবং $y_{max} = \frac{PL^3}{3EI}$

**** ২। একটি $4m$ লম্বা ক্যান্টিলিভার বীমের মুক্তপ্রান্তে $1000\ kg$ কেন্দ্রীভূত ভার স্থাপন করা হলে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশনের মান নির্ণয় কর।**

বাকাশিবো- ২০১৪'পরি, ১৬

সমাধান ঃ



দেওয়া আছে, $L = 4\ m$

$P = 1000\ kg$

$$\therefore M = 1000 \times 4\ kg\text{-}m$$
$$= 4000\ \ kg\text{-}m$$
$$= 400000 kg\text{-}cm$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2}{3} \times 4 \times 100 = 266.67\ cm$$

$$A_m = \frac{1}{2} \times 400 \times 400000 = 80 \times 10^6 cm^3$$

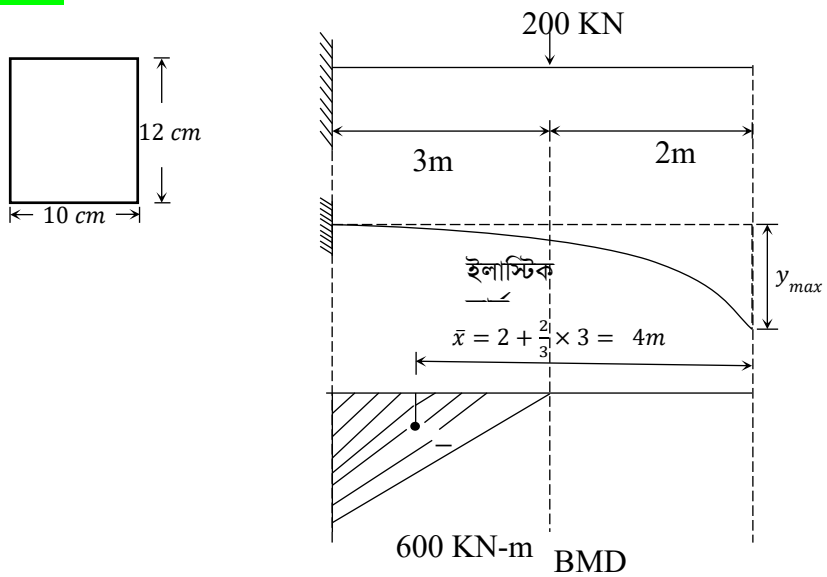
$\therefore$ সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন, $y_{max} = \frac{A_m \bar{x}}{EI}$

$$= \frac{80 \times 10^6 \times 266.67}{EI}$$

$$= \frac{2.1334 \times 10^{10}}{EI}$$ সে.মি. (↓) **(Ans.)**

***** ৩। নিচের চিত্রে প্রদর্শিত লোডের জন্য মুক্তপ্রান্তে ডিফ্লেকশন বাহির কর। $E = 2 \times 10^8 N/mm^2$.** **DUET: 2000-01**

সমাধান ঃ



দেওয়া আছে, $b = 100\ mm$

$d = 120\ mm$

$E = 2 \times 10^8\ N/mm^2$

$I = \frac{100 \times (120)^3}{12}$

$= 14.4 \times 10^6\ mm^4$

$M = 200 \times 1000 \times 3 \times 1000\ N\text{-}mm$

$= 600 \times 10^6\ N\text{-}mm$

$A_m = \frac{1}{2} \times 3 \times 1000 \times 600 \times 10^6\ N\text{-}mm^2$

$= 9 \times 10^{11} N\text{-}mm^2$

$\therefore \bar{x} = 2 + \frac{2}{3} \times 3 = 4\ m = 4000\ mm$

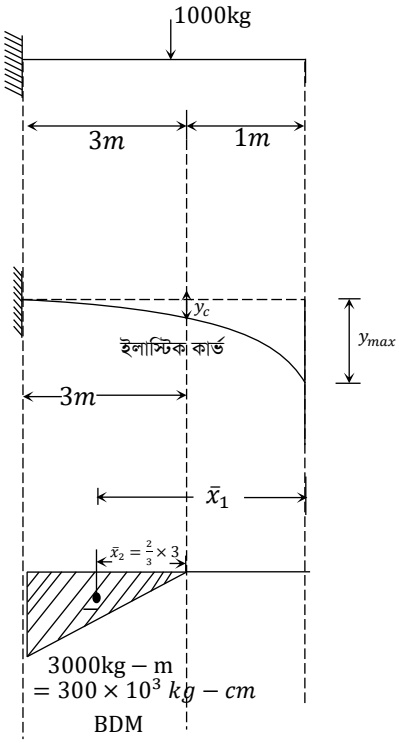
$\therefore$ সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন, $y_{max} = \frac{A_m \bar{x}}{EI}$

$= \frac{9 \times 10^{11} \times 4000}{2 \times 10^8 \times 14.4 \times 10^6}$

$= 1.25\ mm \quad (\downarrow)$ **(Ans.)**

** ৪। একটি $4\,m$ লম্বা ক্যান্টিলিভার বীমের মুক্তপ্রান্ত থেকে $1\,m$ ভিতরে $1000\,kg$ কেন্দ্রীভূত করে ভার স্থাপন করা হলে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশনের মান নিরূপণ কর। $EI = 1.4 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$ হলে লোডের নিচের ডিফ্লেকশন বাহির কর।

সমাধান ঃ



দেওয়া আছে, $L = 4\ m$

$$EI = 1.4 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$$

চিত্র হতে, $M = PL = 1000 \times 3 \times 100\ kg\text{-}cm$

$$= 300 \times 10^3\ kg\text{-}cm$$

$$A_m = \frac{1}{2} \times 3 \times 100 \times 300 \times 10^3\ kg\text{-}cm^2$$

$$= 45 \times 10^6 kg\text{-}cm^2$$

সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন (মুক্তপ্রান্তে)-এর জন্য

$$\overline{x_1} = 1 + \frac{2}{3} \times 3 = 3\ m = 300\ cm$$

$\therefore y_{max} = \frac{A_m \bar{x}}{EI}$

$= \frac{45\times10^6\times300}{1.4\times10^9}$

$= 9.64\ cm(\downarrow)$ **(Ans.)**

লোডের নিচের ডিফ্লেকশন-এর জন্য,

$\overline{x_2} = \frac{2}{3} \times 3 \times 100 = 200\ cm$

[$\overline{x_2}$ = ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু হতে BMD এর ভরকেন্দ্রের দূরত্ব]

$\therefore y_c = \frac{A_m \overline{x_2}}{EI}$

$= \frac{45\times10^6\times200}{1.4\times10^9}$

$= 6.43\ cm(\downarrow)$ **(Ans.)**

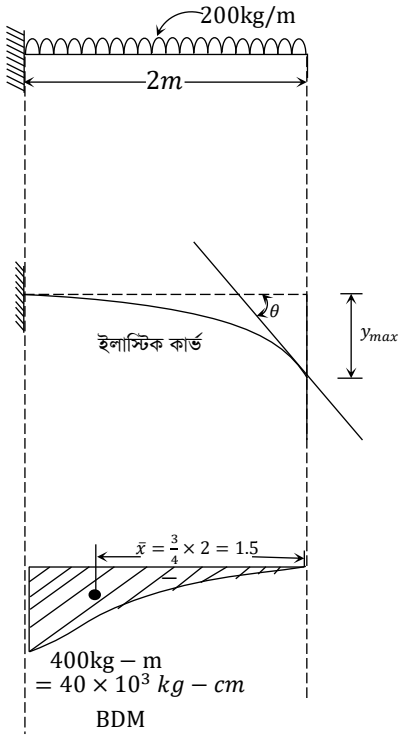
*** ৫। $2m$ স্প্যানবিশিষ্ট ক্যান্টিলিভার বিমে প্রতি মিটারে $200\ kg$ লোড সমভাবে বিস্তৃত আছে। বীমটির সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন ও স্লোপ নির্ণয় কর। $EI = 1.4 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$.

DUET: 17-18, বাকাশিবো- ২০২৩'পরি, ২৪'পরি

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $L = 2\ m$

$$\omega = 200\ kg/m$$

$$EI = 1.4 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$$



$$M = \frac{\omega L^2}{2} = 200 \times \frac{2^2}{2} = 400\ kg\text{-}m$$

$$= 40 \times 10^3 kg\text{-}cm$$

$$A_m = \frac{1}{3} \times b \times h$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times 100 \times 40 \times 10^3\ kg\text{-}cm^2$$

$$= 2.667 \times 10^6\ kg\text{-}cm^2$$

$$\bar{x} = \frac{3}{4} \times 2 \times 100 = 150\ cm$$

সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন মুক্তপ্রান্তে হবে।

$$\therefore y_{max} = \frac{A_m \bar{x}}{EI}$$

$$= \frac{2.667 \times 10^6 \times 150}{1.4 \times 10^9}$$

$$= 0.286\ cm\ (\downarrow)\ \textbf{(Ans.)}$$

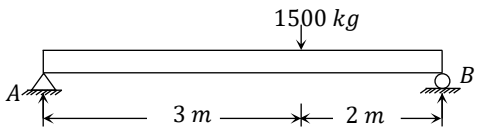
$\therefore$ স্লোপ (Slope), $\theta = \frac{A_m}{EI}$

$$= \frac{(2.667\times10^6)}{1.4\times10^9}$$

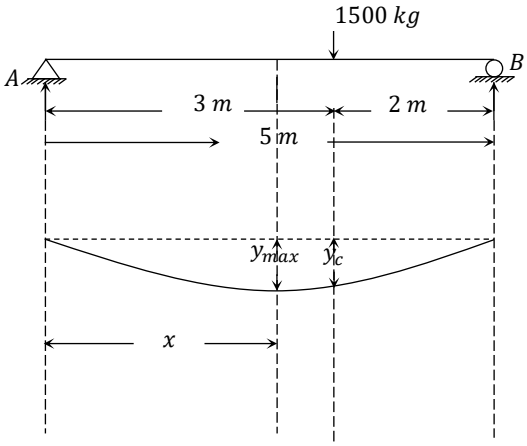
$$= 1.905 \times 10^{-3} \text{ rad. } (\text{ঋ}) \textbf{ (Ans.)}$$

***** ৬। চিত্রের বীমটির সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন কোথায় এবং কত হবে? লোডের নিচের বিচ্যুতিও বের কর। যদি $EI = 2 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$ হয়।**

বাকাশিবো- ২০১০



সমাধান ঃ



দেওয়া আছে, $L = 5\ m = 500\ cm$

$a = 3\ m = 300\ cm$ [যে সাপোর্ট হতে লোড বেশি দূরে]

$b = 2\ m = 200\ cm$

$P = 1500\ kg$ এবং

$EI = 2 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$

আমরা জানি, সর্বোচ্চ বিচ্যুতির অবস্থান (বাম হতে ডানে বা A হতে ডানে),

$$x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{5^2 - 2^2}{3}}$$

$\therefore x = 2.65\ m = 265\ cm$ (A হতে ডানে) **(Ans.)**

সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন, $y_{max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}\ EIL}$

$$= \frac{1500 \times 200 \times (500^2 - 200^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3} \times 2 \times 10^9 \times 500}$$

$= 1.852\ cm\ (\downarrow)$ **(Ans.)**

লোডের নিচে ডিফ্লেকশন, $y_c = \frac{Pa^2b^2}{3\ EIL}$

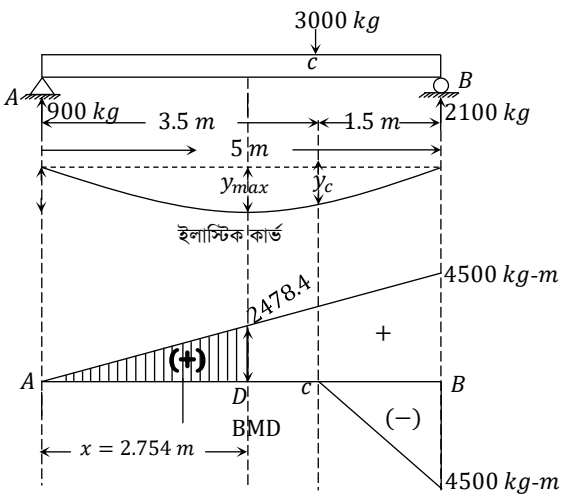
$$= \frac{1500 \times (300)^2 \times (200)^2}{3 \times 2 \times 10^9 \times 500}$$

$= 1.8\ cm\ (\downarrow)$ **(Ans.)**

*** ৭। সাধারণভাবে স্থাপিত একটি বীমের দৈর্ঘ্য $5\ m$. এর বাম সাপোর্ট থেকে $3.5\ m$ দূরে একটি $3000\ kg$ কেন্দ্রীভূত লোড প্রয়োগ করা হয়েছে। যদি $EI = 26 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$ হয়, তবে সাপোর্টদ্বয়ের স্লোপ কোণ, লোডের নিচে ডিফ্লেকশন এবং সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন নির্ণয় কর

বাকাশিবো- ২০০৫, ২০১৬'পরি

সমাধান ঃ



দেওয়া আছে, $L = 5\ m = 500\ cm$

$a = 3.5\ m = 350\ cm$

$b = 1.5\ m = 150\ cm$

$EI = 26 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$

A বিন্দুর প্রতিক্রিয়া বল B বিন্দুতে ধনাত্মক এবং লোডের ফলে B বিন্দুতে ধনাত্মক বেন্ডিং মোমেন্টের ভিন্ন ভিন্ন ডায়াগ্রাম (BMD) অঙ্কন করতে হবে

আমরা জানি,

বাম সাপোর্ট হতে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন বিন্দুর দূরত্ব, $x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$

$$= \sqrt{\frac{5^2 - 1.5^2}{3}}$$

$$\therefore x = 2.754\ m\ (\rightarrow)$$

লোডের নিচে ডিফ্লেকশন, $y_c = \frac{Pa^2b^2}{3\,EIL}$

$$= \frac{3000\times(350)^2\times(150)^2}{3\times26\times10^9\times500}$$

$$= 0.212\ cm\ (\downarrow)\ \textbf{(Ans.)}$$

সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন, $y_{max} = \frac{P\times b(L^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}EIL}$

$$= \frac{3000\times150\times(500^2-150^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}\times26\times10^9\times500}$$

$$= 0.241\ cm\ (\downarrow)\ \textbf{(Ans.)}$$

A বিন্দুতে স্লোপ বের করতে হলে A বিন্দু ও সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন বিন্দুর মধ্যবর্তী BMD এর ক্ষেত্রফল (চিত্রের A ও D এর মধ্যবর্তী)

$$\therefore A_m = \frac{1}{2}\times x\times h$$

$$= \frac{1}{2}\times(2.754\times100)\times(2478.4\times100)$$

$$= 34127568\ kg\text{-}cm^2$$

এখানে, $x = A$ হতে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন বিন্দুর দূরত্ব
$h = x$ দূরত্বে বেন্ডিং মোমেন্ট বা উচ্চতা
$= 900\times2.754$
$= 2478.4$

$\therefore A$ বিন্দুতে স্লোপ $\theta_A = \frac{A_m}{EI}$

$$= \frac{34127568}{26\times10^9}$$

$$= 0.0013\ \text{rad}\ (\circlearrowright)\ \textbf{(Ans.)}$$

B বিন্দুতে স্লোপ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে B বিন্দু ও সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন বিন্দুর মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফল (B ও D বিন্দুর) ধনাত্মক হলে $(+ve)$ এবং ঋণাত্মক হলে বাদ $(-ve)$ দিতে হবে।

$\therefore A_m = A_{m_1} - A_{m_2}$

$= \frac{1}{2} \times \{(2478.4 + 4500) \times 100\} \times \{(5 - 2.754) \times 100\}$

$- \frac{1}{2} \times (4500 \times 100) \times (1.5 \times 100)$

$\therefore A_m = 44617432\ kg\text{-}cm^2$

$\therefore B$ বিন্দুতে স্লোপ, $\theta_B = \frac{A_m}{EI}$

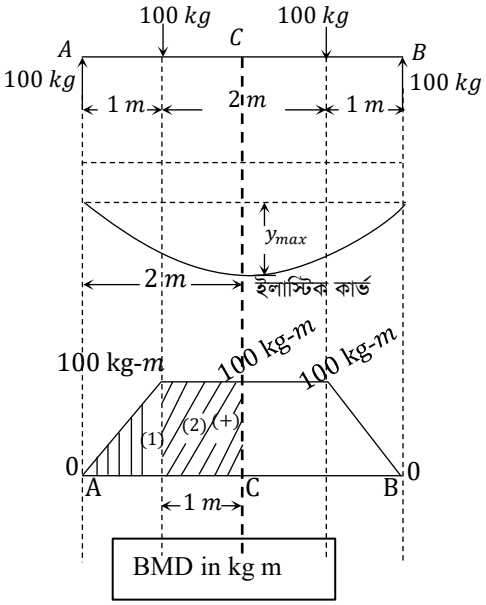
$= \frac{44617432}{26 \times 10^9}$

$= 0.00172$ rad (ঘ) **(Ans.)**

(Ans. $y_c = 0.212\ cm\ (\downarrow)$, $y_{max} = 0.241\ cm\ (\downarrow)$, $\theta_A = 0.0013$ rad (ঘ), $\theta_B = 0.0017$ rad (ঘ)**)**

*** ৮। সাধারণভাবে স্থাপিত একটি বীমের স্প্যান দৈর্ঘ্য $4\ m$ এবং প্রস্থচ্ছেদ $(12\ cm \times 24\ cm)$. বীমের উভয় সাপোর্ট হতে $1\ m$ দূরে $100\ kg$ লোড প্রয়োগ করা হলে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন নির্ণয় কর। $E = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$. বাকাশিবো- ২০০৭, ১৯, ২১

সমাধান ঃ



দেওয়া আছে, $L = 4\ m$

$$b \times d = 12\ cm \times 24\ cm$$

$$\therefore I = \frac{12 \times (24)^3}{12} = 13824\ cm^4$$

বীমটির সাপোর্ট হতে 2 m দূরে সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন হবে।

$$A_{m_1} = \frac{1}{2} \times b \times h$$

N.B ঃ সরাসরি BMD অঙ্কনের ক্ষেত্রে যেকোনো বিন্দুর বেন্ডিং মোমেন্ট ঐ বিন্দুর ডানে বা বামের আড়াআড়ি বলের মোমেন্টের বীজগাণিতিক ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times (1 \times 100) \times (100 \times 100)$$

$$= 500 \times 10^3\ kg\text{-}cm^2$$

$$\overline{x_1} = \frac{2}{3} \times 100 = 66.67\ cm\ [A \text{ হতে ডানে}]$$

এখানে, Δ_2 = ডিফ্লেকশন মাপন বিন্দু (A) ও সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন বিন্দুর (c) মাঝের লোডের নিচে ডিফ্লেকশন বের করতে বললে, লোডিং পয়েন্ট ও সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন বিন্দুর মধ্যবর্তী BMD এর ক্ষেত্রফলের মোমেন্টকে EI দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $\Delta_2 = \frac{A_{m_2}\bar{x}}{EI}$

এখানে, $\bar{x}$ = লোডিং পয়েন্ট হতে উক্ত ক্ষেত্রের ভরকেন্দ্র

$\therefore \bar{x} = \frac{100}{2} = 50\ cm.$

$$A_{m_2} = b \times h$$
$$= (1 \times 100) \times (100 \times 100)$$
$$= 1 \times 10^6\ kg\text{-}cm^2$$

$$\overline{x_2} = (1 + \frac{1}{2}) \times 100 = 150\ cm$$

$$\therefore y_{max} = \frac{A_{m_1}\overline{x_1} + A_{m_2}\overline{x_2}}{EI}$$
$$= \frac{500 \times 10^3 \times 66.67 + 1 \times 10^6 \times 150}{2 \times 10^6 \times 13824}$$
$$= 0.00663\ cm\ (\downarrow)\ \textbf{(Ans.)}$$

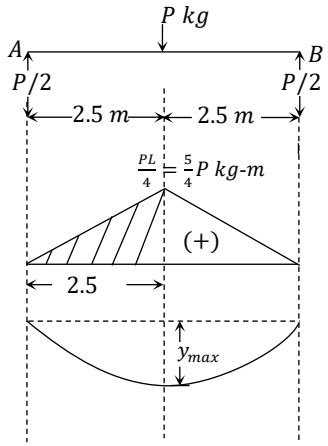
লোডের নিচে ডিফ্লেকশন, $y_c = y_{max} - \Delta_2$

$$\therefore y_c = 0.00663 - \frac{1 \times 10^6 \times \frac{100}{2}}{2 \times 10^6 \times 13824}$$
$$= 0.00663 - 0.0018$$
$$= 0.00482\ cm\ (\downarrow)\ \textbf{(Ans.)}$$

** ৯। $5\,m$ দীর্ঘ একটি সাধারণভাবে স্থাপিত বীমের সর্বোচ্চ অনুমোদনযোগ্য ডিফ্লেকশন $2\,mm$ হলে বীমটির মধ্যবিন্দুতে কত কেন্দ্রীভূত লোড প্রয়োগ করা যাবে? $EI = 9 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$.

বাকাশিবো- ২০০৯

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $L = 5\ m$



$EI = 9 \times 10^9\ kg\text{-}cm^2$

$y_{max} = 2\ mm = 0.2\ cm$

সর্বোচ্চ ডিফ্লেকশন ঠিক মাঝখানে হবে।

$$\therefore y_{max} = \frac{A_m \bar{x}}{EI}$$

$$A_m = \frac{1}{2} \times b \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times (2.5 \times 100) \times \left(\frac{5}{4} P \times 100\right)$$

$$= 15625\ P\ kg\text{-}cm$$

Note ঃ $'P'\ kg$ তে ধরা হয়েছে, কারণ $EI\ kg$ তে আছে

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \times (2.5 \times 100) = 166.67\ cm$$

$$\therefore y_{max} = \frac{A_m \bar{x}}{EI}$$

$$\Rightarrow 0.2 = \frac{15625\ P \times 166.67}{9 \times 10^9}$$

$$\therefore P = \left(\frac{9 \times 10^9 \times 0.}{15625\ P \times 166.67}\right)$$

$$= 691.2\ kg\ \textbf{(Ans.)}$$

Shortcut ঃ

আমরা জানি, $y_{max} = \frac{PL^3}{48EI}$

$$\Rightarrow 0.2 = \frac{P\times(300)^3}{48\times9\times10^9}$$

$$\Rightarrow P = \frac{48\times9\times10^9\times0.2}{(300)^3}$$

$$\therefore P = 691.2\ kg$$ **(Ans.)**